

# 数 学

## 注 意

- 1 問題は **1** から **4** までで、7 ページにわたって印刷してあります。  
また、解答用紙は両面に印刷してあります。
- 2 検査時間は 50 分で、終わりは午前 11 時 00 分です。
- 3 声を出して読むではいけません。
- 4 答えは全て解答用紙に HB 又は B の鉛筆（シャープペンシルも可）を使って  
明確に記入し、**解答用紙だけを提出**しなさい。
- 5 答えに根号が含まれるときは、**根号を付けたまま、分母に根号を含まない  
形で表し**なさい。また、**根号の中を最も小さい自然数**にしなさい。
- 6 答えは解答用紙の決められた欄からはみ出さないように書きなさい。
- 7 答えを直すときは、きれいに消してから、消しくずを残さないようにして、  
新しい答えを書きなさい。
- 8 **受検番号**を解答用紙の表面と裏面の決められた欄に書き、表面については、  
その数字の ○ の中を**正確に塗りつぶし**なさい。
- 9 解答用紙は、汚したり、折り曲げたりしてはいけません。



1 次の各問に答えよ。

[問 1]  $\frac{(\sqrt{10}-1)^2}{5} - \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\sqrt{10}}$  を計算せよ。

[問 2] 2 次方程式  $3(x+3)^2 - 8(x+3) + 2 = 0$  を解け。

[問 3] 右の図 1 は正五角形 ABCDE で、点 P は頂点 A の位置にある。

1 から 6 までの目が出る大小 1 つずつのさいころを同時に 1 回投げる。

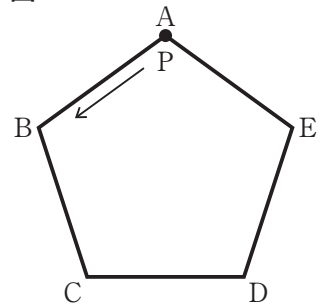
大きいさいころの出た目の数を  $a$ 、小さいさいころの出た目の数を  $b$  とする。

点 P は、頂点 A を出発して、出た目の数の和  $a+b$  だけ正五角形の頂点上を反時計回り（矢印の方向）に移動する。例えば  $a+b=6$  のとき、点 P は頂点 B の位置にある。

点 P が頂点 E の位置にある確率を求めよ。

ただし、大小 2 つのさいころはともに、1 から 6 までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。

図 1

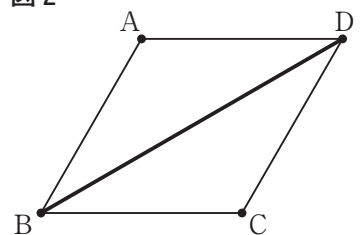


[問 4] 2 つの自然数  $x, y$  は、 $x^2 - 4y^2 = 13$  を満たしている。このとき、2 つの自然数  $x, y$  の値をそれぞれ求めよ。

[問 5] 右の図 2 で、四角形 ABCD は、 $\angle ABC = 60^\circ$  のひし形で、対角線 BD を引いたものである。

解答欄に示した図をもとにして、ひし形 ABCD を定規とコンパスを用いて作図し、頂点 A、頂点 C の位置を示す文字 A, C もそれぞれ書け。

図 2



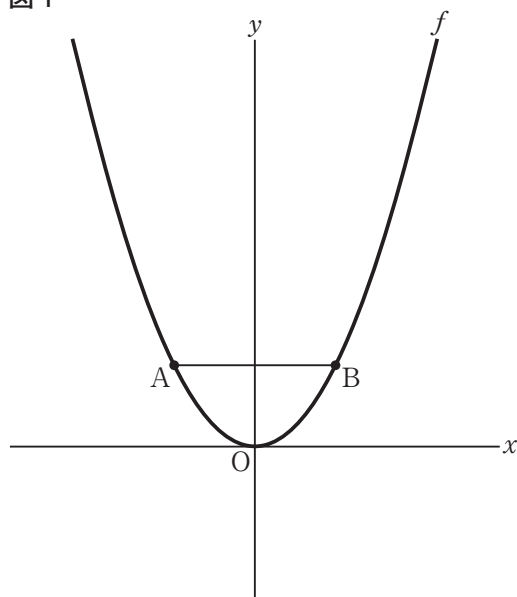
2 右の図1で、点Oは原点、曲線 $f$ は関数 $y = ax^2$  ( $a > 0$ ) のグラフである。

2点A, Bはともに曲線 $f$ 上にあり、点Aの $x$ 座標は負の数、点Bの $x$ 座標は正の数であり、点Aと点Bの $x$ 座標の絶対値は等しい。

点Aと点Bを結ぶ。

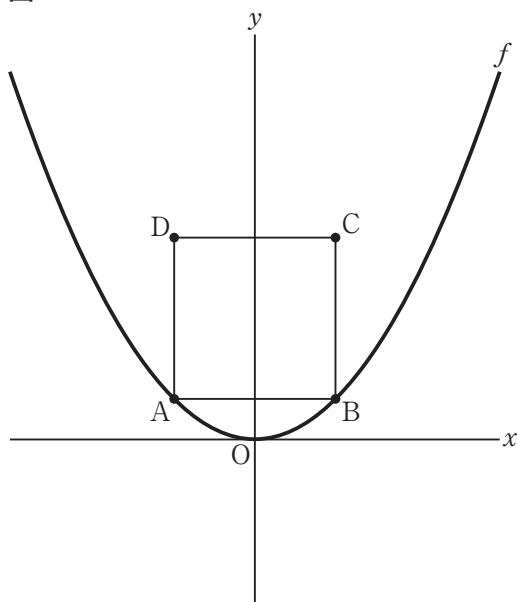
点Oから点(1, 0)までの距離、および点Oから点(0, 1)までの距離をそれぞれ1 cm として、次の各問に答えよ。

図1



[問1] 右の図2は、図1において、 $a = \frac{1}{2}$ 、点Aの $x$ 座標を $-1$ とし、四角形ABCDが正方形となるように $y$ 座標はともに正の数となる点Cと点Dをとり、点Bと点C、点Cと点D、点Dと点Aをそれぞれ結んだ場合を表している。2点B, Dを通る直線の式を求めよ。

図2

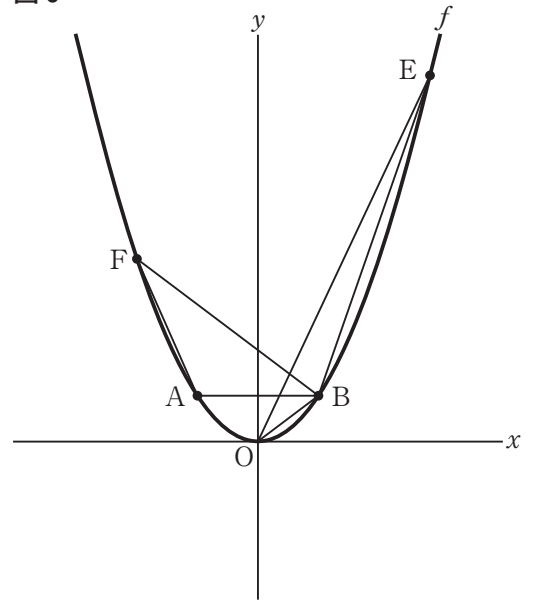


[問2] 右の図3は、図1において、点Aの $x$ 座標を $-1$ とし、点Eは曲線 $f$ 上にあり、 $x$ 座標が $3$ となる点とし、点Fは曲線 $f$ 上にあり、 $x$ 座標が負の数で、 $y$ 座標が点Aの $y$ 座標より大きい点とし、点Oと点B、点Bと点E、点Eと点O、点Bと点F、点Fと点Aをそれぞれ結んだ場合を表している。

$\triangle BEO$ と $\triangle ABF$ の面積が等しくなるとき、点Fの $x$ 座標を求めよ。

ただし、答えだけでなく、答えを求める過程が分かるように、途中の式や計算なども書け。

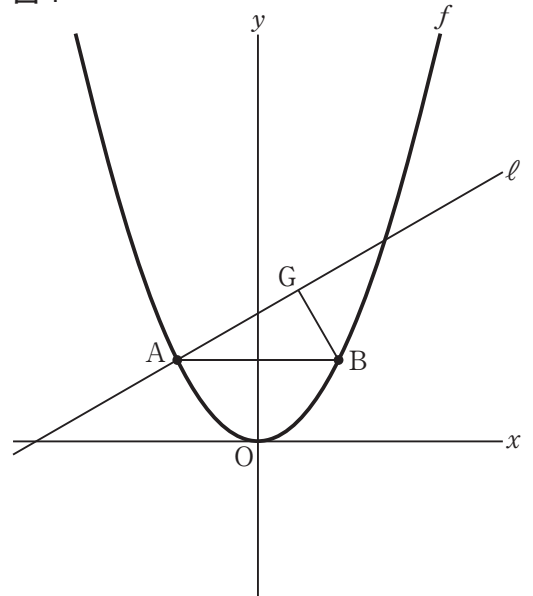
図3



[問3] 右の図4は、図1において、点Aを通り、傾きが曲線 $f$ の式における比例定数 $a$ と等しい直線 $\ell$ とし、点Bから直線 $\ell$ に引いた垂線と直線 $\ell$ との交点をGとし、点Bと点Gを結んだ場合を表している。

点Aの $x$ 座標が $-\sqrt{7}$ 、 $\triangle ABG$ の面積が $7\text{ cm}^2$ のとき、 $a$ の値を求めよ。

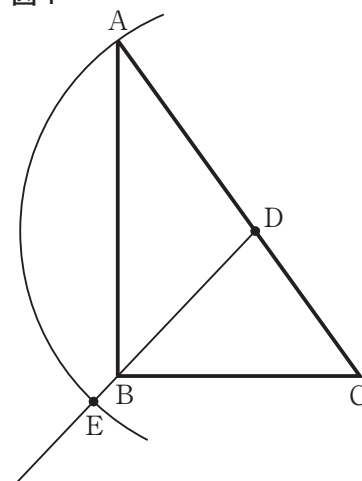
図4



3 右の図1で、 $\triangle ABC$  は、 $\angle B = 90^\circ$  の直角三角形で、辺  $AC$  上にあり頂点  $A$ 、 $C$  と異なる点を  $D$  とし、 $DA \geq DB$  とする。点  $D$  と頂点  $B$  を結んだ線分を頂点  $B$  の方向に伸ばした直線上にあり、 $DA = DE$  となる点を  $E$  とする。

点  $D$  を中心とし、線分  $DA$  の長さを半径とする円  $D$  上の 2 点  $A$ 、 $E$  を結ぶ  $\widehat{AE}$ 、線分  $DA$ 、線分  $DE$  で囲まれた図形を、おうぎ形  $DAE$  とする。ただし、おうぎ形  $DAE$  の中心角は  $180^\circ$  より小さいものとする。  
次の各問に答えよ。

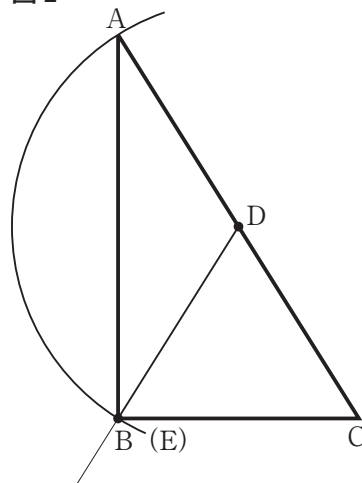
図1



[問1] 右の図2は、図1において、頂点  $B$  と点  $E$  が一致した場合を表している。

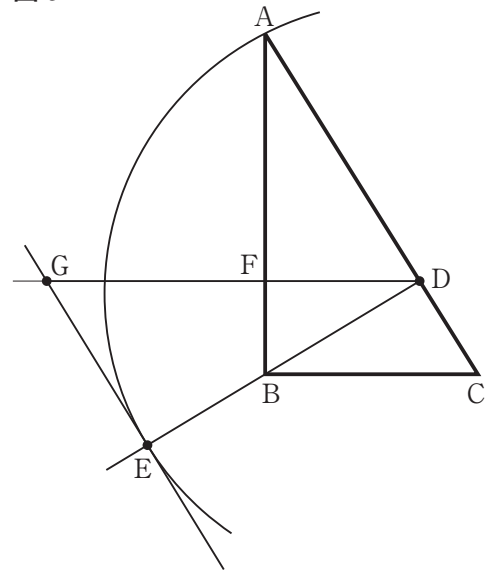
$DA = 3 \text{ cm}$ 、 $BC = 2\sqrt{3} \text{ cm}$  のとき、 $\triangle DBC$  の面積は何  $\text{cm}^2$  か。

図2



[問2] 右の図3は、図1において、点Dが  $AD^2 + BD^2 = AB^2$  を満たし、点Dを通り、辺ABに垂直な直線を引き、線分ABとの交点をF、直線DF上にある点をGとし、点Gと点Eを結んだ直線が円Dの点Eにおける接線となる場合を表している。  
 $AB = DG$ であることを証明せよ。

図3

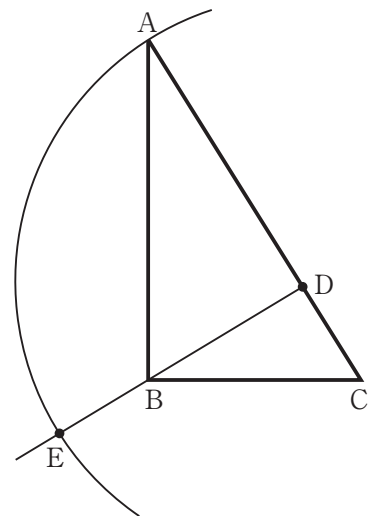


[問3] 右の図4は、図1において、 $\angle ADB = 90^\circ$ の場合を表している。

図4

$AB = 4\sqrt{3}$  cm,  $CD = 2$  cm のとき、おうぎ形 DAE の  $\widehat{AE}$ , 線分 EB, 線分 BC, 線分 CA で囲まれた図形を、直線 AC を軸として1回転させたときにできる回転体の体積は何  $\text{cm}^3$  か。

ただし、円周率は  $\pi$  とする。



- 4 Mさんが、自由研究で自然数の性質について図書館で調べたところ、本の中に、次のような操作で、自然数がどのように変わっていくかが書かれていた。

本の内容

操作

ある自然数  $a$  が

- ① 偶数なら  $a$  を 2 で割る。
- ② 奇数なら  $a$  を 3 倍して 1 を加える。

自然数  $a$  に操作を行い、得られた数を  $b$  とし、 $b$  に対して操作を行って  $c$  を得ることを自然数  $a$  に 2 回の操作を行うとし、3 回、4 回、5 回、… の操作は同様とする。

例えば、7 に 3 回の操作を行うと  $7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34$  となる。

自然数  $a$  が 10000 以下のとき、自然数  $a$  に操作を繰り返し行うと必ず 1 になることは分かっている。

Mさんは自然数  $a$  が初めて 1 になるまでの操作の回数に興味を持った。そこで、自然数  $a$  に操作を繰り返し行い、初めて 1 になるまでの操作の回数を  $N(a)$  とし、 $N(1) = 0$  とした。

例えば、10 に操作を繰り返し行くと、6 回の操作で初めて 1 になるので、 $N(10) = 6$  である。

次の各問に答えよ。

[問 1]  $N(6)$  を求めよ。

[問 2]  $N(168) - N(8 \times d) = 3$  を満たす自然数  $d$  を求めよ。

ただし、答えだけでなく、答えを求める過程が分かるように、途中の式や計算なども書け。



Mさんは、操作の回数だけでなく、1になるまでの自然数の変化にも着目してみた。下の表は2020に操作を繰り返し行い、2020が1になるまでに現れたすべての自然数を2020も含めて左から小さい順に並べたとき、最初から $x$ 番目の自然数を $y$ として、 $x$ と $y$ の関係を表したものである。ただし、 $e, f, g$ にはそれぞれある自然数があてはまり、表の中の…の部分には自然数が省略されている。

$x$	1	2	3	4	…	$e-2$	$e-1$	$e$	$e+1$	…	$N(2020)$	$N(2020)+1$
$y$	1	2	4	5	…	172	$f$	$g$	344	…	2020	2752

表の $y$ の値の中央値は233.5で、 $f$ は2020から37回操作を行ったときに現れる自然数で、2020から38回操作を行ったときに現れる自然数は98であり、 $N(2020) = 53 + N(160)$ が成り立つ。

[問3] このとき自然数の組 $(e, g)$ を求めよ。





2  
西

娄

守